

Екзаменул уник де стат ла МАТЕМАТИКЭ

Варианта демонстративэ материалелор де апречиере а куноштинцелор пентру реализаря ын анул 2024 экзаменулуй уник де стат ла МАТЕМАТИКЭ

Експликаций ла варианта демонстративэ а материалелор де апречиере пентру ЕУС ла математикэ а анулуй 2024

Варианта демонстративэ есте дестинатэ пентру а да о ынкипуире деспре структура виитоарелор материале де апречиере, деспре нумэрул де ынсэрчинэрь, деспре форма лор ши нивелул де комплекситате.

Ынсэрчинэриле вариантэй демонстративе ну рефлектэ тоате ынтребэриле концинутулуй, каре пот фи инклусе ын материалеле де апречиере ын анул 2024. Структура лукрэрий есте датэ ын спецификацие, яр листа ынтребэрилор – ын кодификаторий элементелор концинутулуй ши черинцелор кэтре нивелул прегэтирей а абсолвенцилор организациилор де ынвэцэмынт пентру а реализа экзаменул уник де стат ын анул 2024 ла математикэ.

Лукраря де экзаминаре есте форматэ дин доуэ пэрць, каре диферэ дупэ концинут, комплекситате ши нумэрул де ынсэрчинэрь. Критериул стабилит фиекэрей пэрць а лукрэрий есте форма ынсэрчинэрилор:

- партя 1 концине 12 ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 1–12) ку рэспунс скурт;
- партя 2 концине 4 ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 13–16) ку рэспунс скурт ши чинч ынсэрчинэрь (ынсэрчинэриле 17–21) ку рэспунс десфэшурат.

Дупэ нивелул де комплекситате ынсэрчинэриле се репартизиязэ ын фелул урмэтор: ынсэрчинэриле 1–12 ау нивел де базэ, ынсэрчинэриле 13–20 – нивел ридикат, ынсэрчинаря 21 се реферэ ла нивелул ыналт де комплекситате.

Ынсэрчинаря ку рэспунс скурт (1-16) се сокоате ындеплинитэ, дакэ ын формуларул ку рэспунсурь №1 есте фиксат рэспунсул корект ын формэ де нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ.

Резолваря коректэ а фиекэрей дин ынсэрчинэриле 1-16 есте естиматэ ку ун пункт.

Резолваря коректэ фиекэрей дин ынсэрчинэриле 17 - 18 есте естиматэ ку - 2 пункте; 19 ши 20 — 3 пункте ши 21 — 4 пункте. Пунктажул максимал примар пентру ындеплиниря лукрэрий — 30 пункте.

Критерииле презентате де евалуаре пермит сэ ынцележець черинцеле привинд деплинэтатя ши коректитудиня резолвэрилор. Пентру фиекаре ынсэрчинаре ку рэспунс десфэшурат, инклусэ ын варианта демонстративэ, се пропуне о резолваре дин челе посибиле.

Варианта демонстративэ а материалелор де апречиере, системул де евалуаре, спецификация ши кодификаторий вор ажута сэ елабораць стратегия де прегэтире кэтре ЕУС ла математикэ.

Инструкциунь ла ындеплиниря лукрэрий

Лукраря де экзаминаре есте алкэтуитэ дин доуэ пэрць, инклузынд ын сине 21 де ынсэрчинэрь.

Партя 1 концине 12 ынсэрчинэрь ла нивел де базэ де комплекситате ку рэспунс скурт.

Партя 2 концине 4 ынсэрчинэрь ла нивел ридикат де комплекситате ку рэспунс скурт ши 5 ынсэрчинэрь ла нивел ридикат ши ыналт де комплекситате ку рэспунс десфэшурач.

Пентру ындеплиниря лукрэрий де экзаминаре ла математикэ се атрибуе 3 оре 55 минуте (235 минуте).

Рэспунсуриле ла ынсэрчинэриле 1–16 се скриу ын формэ де нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ.

Нумереле скриець ын кымпуриле рэспунсурилор ын текстул лукрэрий, яр апой ле трансфераць ын формуларул ку рэспунсурь № 1.

Рэспунс: -0,8.

Ындеплининд ынсэрчинэриле 17–21 се чере де скрис резолваря комплетэ ши рэспунсул ын формуларул ку рэспунсурь № 2.

Тоате формулареле ЕУС се ындеплинеск ку чернялэ нягрэ апринсэ. Се пермите фолосиря пиксурилор капиларе, ку жел сау ку пениць.

Ла ындеплиниря ынсэрчинэрилор се поате фолоси макулаторул. Ынскриериле ын макулатор ну се яу ын консидерацие ла апречиеря лукрэрий.

Пунктеле, акумулаторе де кэтре Думнявоастрэ пентру ынсэрчинэриле ындеплините, се сумязэ. Стэруици-вэ сэ ындеплиниць кыт май мулте ынсэрчинэрь ши сэ акумулаць чел май маре пунктаж.

Вэ дорим сукчес!

*Рэспунсул ла ынсэрчинэриле 1–16 есте нумэр ынтрег сау фракцие зечималэ финитэ. Рэспунсул скриець ын **ФОРМУЛАРУЛ КУ РЭСПУНСУРЬ № 1** ын партя дрянтэ де ла нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините, ынчепынд ку примул пэтрэцел. Фиекаре цифрэ, семн минус ши виргулэ скриець ын пэтрэцел апарте ын кореспундере ку моделеле арэтане ын формулар. Унитэциле де мэсурэ ну есте нечесар де скрис.*

Партя 1

1. Челе май симпле проблеме.

Ынэлцимя омулуй есте 6 футурь 1 цол. Экспримаць ынэлцимя луй ын чентиметри, дакэ 1 фут есте егал ку 12 цоль. Луаць ын консидерацие, кэ 1 цол есте егал ку 2,54 чм. Ротунжиць рэспунсул пынэ ла ун нумэр ынтрег де чентиметри.

Резолваре.

Ынэлцимя омулуй алкэтуеште $(6 \cdot 12 + 1) \cdot 2,54 = 185,42$ чм. Ротунжинд, обцинем 185 чм.

Рэспунс: 185.

сау

Чоколата костэ 35 рубле. Думиникэ ла супермаркет акциязэ о пропунере специалэ: акитынду-се пентру доуэ чоколате, кумпэрэторул примеште трей (уна ын кадоу). Кыте чоколате се поате де примит де 200 рубле думиникэ?

Резолваре.

Ымпэрцим 200 ла 35:

$$\frac{200}{35} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$$

Ачаста ынсямнэ, кэ ва фи посибил де кумпэрэат 5 чоколате. Ынкэ 2 вор фи оферите кадоу. Ын тотал се пот обцине 7 чоколате.

Рэспунс: 7.

2. Проблеме ла проченте.

Оля а келтуит ын магазинул де кэрць 500 рубле. Пентру кумпэрэаря кэрций еа а келтуит 65% дин сумэ, яр пентру календар — 20% дин сумэ. Кыте рубле костэ рестул мэрфий кумпэрэате?

Резолваре.

Пентру а прокура рестул мэрфий с-а келтуит $100\% - 65\% - 20\% = 15\%$ дин сумэ, че алкэтуеште $500 \cdot 0,15 = 75$ руб.

Рэспунс: 75 руб.

сау

Примул нумэр конституе 35% дин ал дойля нумэр, яр ал трейля — 80% дин ал дойля нумэр. Афлаць примул нумэр, дакэ се штие, кэ ел есте май мик декыт ал трейля ку 18.

Резолваре.

Диференца динтре ал трейля ши примул нумэр конституе $80\% - 35\% = 45\%$ дин ал дойля нумэр. Прин урмаре, ал дойля нумэр есте егал ку $18 : 0,45 = 40$. Атунч примул нумэр есте егал ку $40 \cdot 0,35 = 14$.

Рэспунс: 14.

3. Читирия графичелор ши диаграмелор.

Кынд авионул се афлэ ын збор оризонтал, форца де ридикаре, че акциязэ пе арипь, депинде нумай де витезэ.

Пе десен есте арэтатэ ачастэ депенденцэ пентру ун карева авион. Пе акса абсчиселор есте нотатэ витеза (ын километри пе орэ), пе акса ордонателор – форца (ын тоне де форцэ). Ла ун момент дат форца де ридикаре с-а егалат ку 0 тонэ де форцэ. Детерминаць дупэ десен, ку кыць километри пе орэ требуе мэритэ витеза, пентру ка форца де ридикаре сэ се мэряскэ пынэ ла 4 тоне де форцэ?

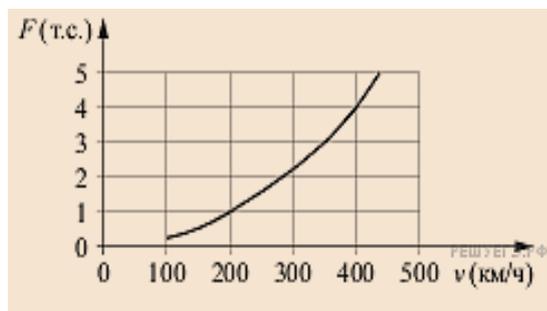
Резолваре.

Дин график се веде, кэ пентру форца де ридикаре де 0 тонэ де форцэ витеза есте егалэ ку 200 км/орэ, яр пентру форца де ридикаре ын 4 тоне де форцэ витеза есте егалэ ку 400 км/орэ. Астфел, витеза требуе мэритэ ку $400 - 200 = 200$ км/орэ.

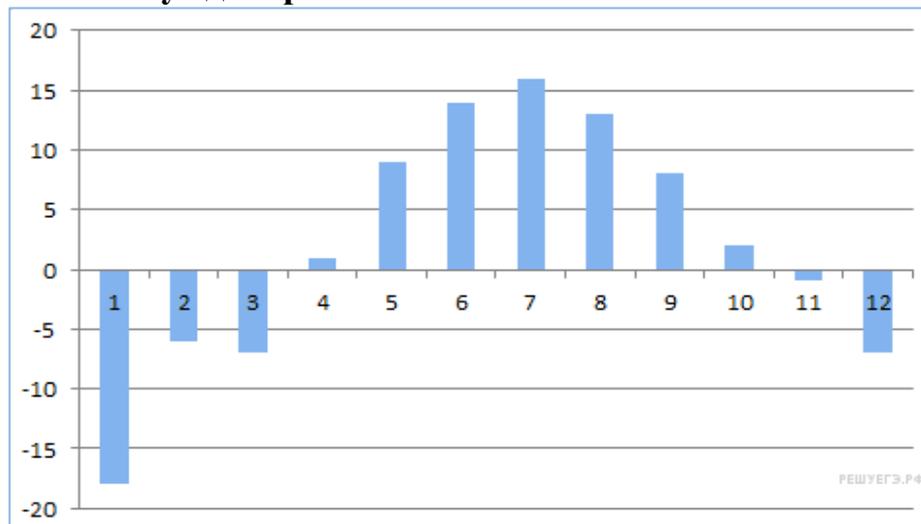
Рэспунс: 200.

сау

Пе диаграмэ есте арэтатэ температура медие а аерулуй (ын граде Челсиус) ын Санкт-Петербург пентру фиекаре лунэ а анулуй 1988. Пе оризонталэ се индикэ луниле, пе вертикалэ — температура ын граде Челсиус.



Детерминаць дупэ диаграмэ, кыте лунь ау фост, кынд температура медие лунарэ а фост май сус де зеро.



Резолваре.

Дин диаграмэ се веде, кэ температура медие лунарэ а фост май сус де зеро пе паркурсул а 7 лунь дин луна априлие пынэ ын октомбрие.

Рэспунс: 7.

4. Лукрул ку формулеле.

Дакэ p_1 , p_2 ши p_3 — нумере приме, атунч сума тутурор дивизорилор а нумэрулуй $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ есте егалэ ку $(p_1 + 1)(p_2 + 1)(p_3 + 1)$. Афлаць сума дивизорилор нумэрулуй 115.

Резолваре.

Дескомпунем нумэрул 115 ын факторь примь: $115 = 5 \cdot 23$. Прин урмаре, сума тутурор дивизорилор нумэрулуй 115 есте егалэ $(5 + 1)(23 + 1) = 6 \cdot 24 = 144$.

Рэспунс: 144.

сау

Лунжимя бисектоарей l_c , дусе ла латура триунгюлуй ку латуриле a , b ши c

се калккулязэ дупэ формула $l_c = \sqrt{ab \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}$. Триунгюл аре латуриле

де 6, 8 ши 7. Афлаць лунжимя бисектоарей, дусе ла латура ку лунжимя 7.

Резолваре.

Афлэм лунжимя бисектоарей, дусе ла латура ку лунжимя 7:

$$l_c = \sqrt{6 \cdot 8 \left(1 - \frac{7^2}{(6+8)^2}\right)} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 12 \left(1 - \left(\frac{7}{14}\right)^2\right)} =$$

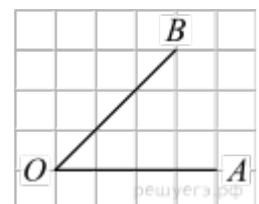
$$= 2 \sqrt{12 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 2 \sqrt{12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = 2 \sqrt{\frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2}} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} = 6.$$

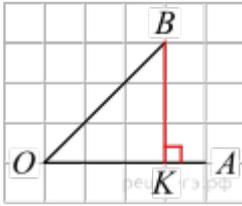
Рэспунс: 6.

5. Рецяуа патратэ, планул де координате.

Пе о фоае ын пэтрэцеле ку дименсиуня пэтрэцелулуй 1×1 есте дат ун унгь. Афлаць танжента унгюлуй дат.

Резолваре.





Коборым перпендикулар BK дин пункт B кэтре семидряпта OA . Танжента унгулуй аскуцит ын триунгиол дрептунгик есте егалэ ку рапортул катетей опусе кэтре чя алэтуратэ. Авынд ын ведере, кэ $BK = OK$, обцинем:

$$\operatorname{tg} \angle AOB = \operatorname{tg} \angle KOB = \frac{BK}{OK} = 1.$$

Рэспунс: 1.

О алтэ методэ де резолваре.

Коборым перпендикулар BK дин пункт B кэтре семидряпта OA . Дин егалитатя катетелор а триунгиулуй дрептунгик конструит KOB фачем конклузия, кэ амбелу унгиорь аскуците сынт егале ку 45° . Прин урмаре, танжента кэутатэ есте егалэ ку 1.

О алтэ методэ де резолваре.

Семидряпта OB трече екзакт де-а лунгул диагоналелор патрателор рецелей. Прин урмаре формязэ ку семидряпта OA ун унгь де 45° . Танжента ачестуй унгь есте егалэ ку 1.

сау

Афлаць ария патрулатерулуй, вырфуриле кэруя ау координателе $(4; 2)$, $(8; 4)$, $(6; 8)$, $(2; 6)$.

Резолваре.

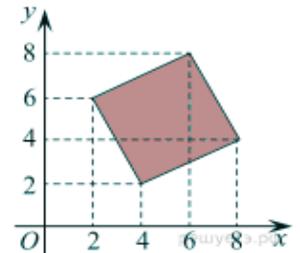
Патрулатерул дескрис есте патрат. Ария патратулуй есте егалэ ку патратул латурий луй.

Латура патратулуй есте егалэ

$$\sqrt{(8-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$$

Атунч ария патратулуй $S = 20$.

Рэспунс: 20.



6. Елементе але теорией пробабилитэцилор.

Ынтр-ун експеримент алеаториу сынт арункате доуэ зарурь. Афлаць пробабилитатя, кэ ын сумэ вор кэдя 8 пункте. Ротунжиць резултатул пынэ ла сутимь.

Резолваре.

Нумэрул де резултате, ын каре вор кэдя 8 пункте, ка урмаре ал арункэрий зарурилор есте егал 5: $2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2$. Фиекаре дин зарурь поате кэдя ын шасе версиунь, деч нумэрул тотал де резултате $6 \cdot 6 = 36$. Прин урмаре

пробабилитатя кэ, ын сумэ вор кэдя 8 пункте, есте егалэ $\frac{5}{36} = 0,138\dots$

Рэспунс: 0,14.

сау

Камера есте илуминатэ де ун фелинар ку доуэ бекурь. Пробабилитатя кэ ун бек се ва арде пе паркурсул анулуй есте егалэ ку 0,3. Гэсиць пробабилитатя, кэ пе паркурсул анулуй чел пучин ун бек ну се ва арде.

Резолваре.

Вом гэси пробабилитатя кэ, се вор арде амбеле бекурь. Ачесте евенименте сынт индепенденте, пробабилитатя продусулуй лор есте егалэ ку продусул пробабилитэцилор ачестор евенименте: $0,3 \cdot 0,3 = 0,09$.

Евениментул, че констэ, кэ ну се ва арде чел пучин ун бек, есте опус. Прин урмаре, пробабилитатя луй есте егалэ ку $1 - 0,09 = 0,91$.

Рэспунс: 0,91.

7. Екуаций симпле.

Резолваць екуация $\log_2(7 + 6x) = \log_2(7 - 6x) + 2$

Резолваре.

Обсервэм, кэ $2 = \log_2 4$ ши фолосим формула

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc.$$

Авем:

$$\log_2(7 + 6x) = \log_2(7 - 6x) + 2 \Leftrightarrow \log_2(7 + 6x) = \log_2(7 - 6x) + \log_2 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(7 + 6x) = \log_2(28 - 24x) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 + 6x > 0, \\ 7 + 6x = 28 - 24x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{7}{6}, \\ x = \frac{7}{10} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0,7.$$

Рэспунст: 0,7.

сау

Резолваць екуация $9^{2+5x} = 1,8 \cdot 5^{2+5x}$

Резолваре.

Тречем путериле ла ачеяшь базэ:

$$9^{2+5x} = 1,8 \cdot 5^{2+5x} \Leftrightarrow \frac{9^{2+5x}}{5^{2+5x}} = 1,8 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^{2+5x} = \left(\frac{9}{5}\right)^1 \Leftrightarrow 2 + 5x = 1 \Leftrightarrow x = -0,2.$$

Рэспунс: -0.2.

8. Планиметрия : проблеме, легате ку унгиориле.

Ын триунюл ABC унгиул C есте егал ку 90° ,

$$\cos A = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad BC = 5. \text{ Афлаць } AC.$$

Резолваре.

Авем:

$$AC = \frac{BC}{\operatorname{tg} A} = \frac{BC \cos A}{\sin A} = \frac{BC \cos A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{1 - \frac{5}{25}}} = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} = 2,5.$$

Рэспунс: 2,5.

сау

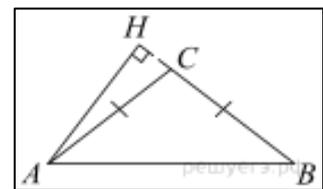
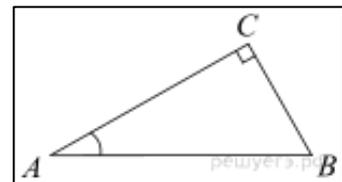
Ын триунюл ABC $AC = BC$, $AB = 10$, ынэлцимя AH есте егалэ ку 3. Афлаць синусул унгиулуй BAC .

Резолваре.

Триунюл ABC исосчел, чей че ынсямнэ кэ, унгиориле BAC ши ABH сынт егале ка унгиорь де ла база луй.

$$\sin \angle BAC = \sin \angle ABH = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Рэспунс: 0,3.



9. Анализа графичелор ши диаграмелор.

Стабилить о кореспонденцэ ынтре функцииле ши карактеристичиле ачестор функций пе сегментул $[2; 5]$.

ФУНКЦИЙ

КАРАКТЕРИСТИЧИЛЕ ФУНКЦИИЛОР

- А) $y = 5x - x^2$ 1) Функция дескреште пе сегментул [2; 5]
 Б) $y = 2x + 1$ 2) Функция аре пункт де максим пе сегментул [2;5]
 В) $y = 16 - 2x$ 3) Функция аре пункт де миним пе сегментул [2; 5]
 Г) $y = x^2 - 8x + 3$ 4) Функция креште пе сегментул [2; 5]

Ын табел суб фиекаре литерэ индикаць нумэрул кореспунзэтор.

А	Б	В	Г

Резолварее.

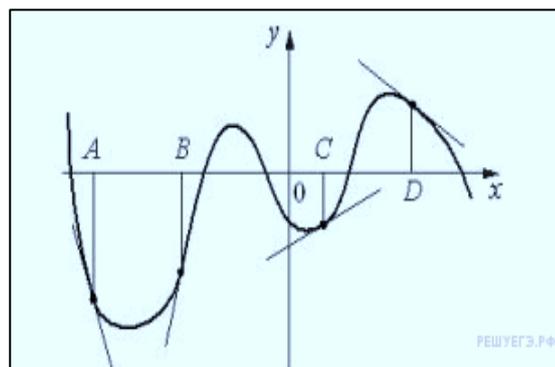
Анализэм фиекаре дин карактеристичь.

- 1) Функция дескреште пе сегментул [2; 5]. Дин функцииле презентате дескреште пе сегментул [2; 5] функция В.
- 2) Функция аре пункт де максим пе сегментул [2; 5]. Дин функцииле презентате аре пункт де максим пе сегментул [2; 5] функция А.
- 3) Функция аре пункт де миним пе сегментул [2; 5]. Дин функцииле презентате аре пункт де миним пе сегментул [2; 5] функция Г.
- 4) Функция креште пе сегментул [2; 5]. Дин функцииле презентате креште пе сегментул [2; 5] функция Б.

Рэспунс: 2413.

сау

Пе десен сынт арэте графикал функцией ши тангентеле, дусе ла график ын пунктеле ку абчиселе А, В, С ши D. Ын колоана дин дряпта сынт индикате валоаря дериватей ын пунктеле А, В, С ши D. Фолосинд графикал, пунець ын кореспонденцэ фиекэруй пункт валоаря дериватей функцией ын ел



ПУНКТЕ

А
 В
 С
 D

ВАЛОАРЯ ДЕРИВАТЕЙ

1) 0,5
 2) - 0,7
 3) 4
 4) - 3

Скриець ын рэспунс чифреле, аранжынду-ле ын ординя, кореспунзэтор литерелор:

А	В	С	D

Резолварее.

Фие унгул, формат де тангентэ ши дирекция позитивэ а аксей абчиселор, есте егал ку α , яр коефициентул унгулар ал тангентей— k . Атунч:

α	k
$\alpha = 0^\circ$	$k = 0$
$0^\circ < \alpha < 45^\circ$	$0 < k < 1$
$\alpha = 45^\circ$	$k = 1$
$45^\circ < \alpha < 90^\circ$	$k > 1$

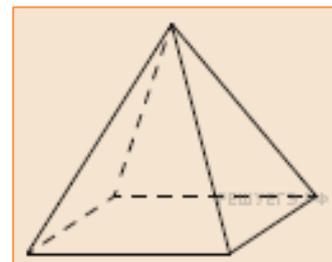
$90^\circ < \alpha < 135^\circ$	$k < -1$
$\alpha = 135^\circ$	$k = -1$
$135^\circ < \alpha < 180^\circ$	$-1 < k < 0$

Валоаря дериватей ын пункт есте егалэ ку коефициентул унгулар ал тангентей, дусе ын ачест пункт. Астфел, обцинем кореспонденца А — 4, В — 3, С — 1 и D — 2.

Рэспунс: 4312.

10. Стереометрия.

Пирамида луй Хеопс аре форма уней пирамиде патрулатере регулате, латура базей а кэруя есте егалэ ку 230 м, яр ынэлцимя — 147 м. Латура базей а екземпларулуй дин музеу а пирамидей есте егалэ ку 115 чм. Афлаць ынэлцимя екземпларулуй дин музеу.



Рэспунсул ыл даць ын чентиметри.

Резолваре.

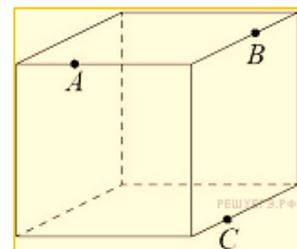
Фие x - ынэлцимя екземпларулуй дин музеу. Афлэм, каре есте рапортул латурилор: $115 : 230 = 1 : 2$. Астфел се рапортэ ши ынэлцимиле:

$$x : 147 = 1 : 2 \Leftrightarrow x = 147 : 2 = 73,5.$$

Рэспунс: 73,5

сау

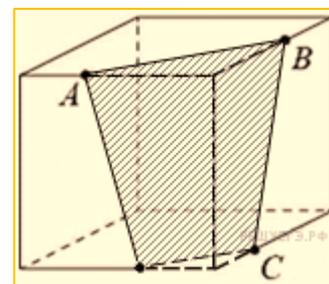
Планул, че трече прин трей пункте А, В ши С, ымпарте кубул ын доуэ полиедре. Кыте феце аре полиедрул, ку май мулте феце?



Резолваре.

Ын секциуне се обцине ун патрулатер. Уна дин фигуриле обцинуте ын урма секциуней аре 15 мукий ши 7 феце, яр а алта — 9 мукий ши 5 феце. Прин урмаре, фигура кэутатэ аре 7 феце.

Рэспунс: 7.



11. Алежеря версиуней оптимале

Ун кэлэтор дин Москва дореште сэ визитезе патру ораше а Инелулуй де Аур дин Русия: Владимир, Ярославл, Суздал ши Ростов. Аженция де туризм оферэ руте ку о визитэ ын унеле ораше але Инелулуй де Аур дин Русия. Информация деспре прецул билетелор ши руте есте презентатэ ын табел.

Нумэрул рутей	Орашеле визитате	Прецул (руб.)
1	Суздал, Ярославл, Владимир	3900
2	Ростов, Владимир	2400
3	Ярославл, Владимир	2100
4	Суздал	1650
5	Ростов, Суздал	2700
6	Ярославл, Ростов	2350

Че руте требуе сэ алягэ кэлэторул, пентру а визита челе патру ораше ши сэ келтуе май пущин де 5000 рубле? Ын рэспунс индикаць нумай ун сет де руте фэрэ локурь либере, запятых и других дополнительных символов.

Резолварее.

Кэлэторул требуе сэ визитезе орашул Ростов, деч екзистэ 3 опциунь — сэ алягэ сау а доуа, сау а чинчя, сау а шася рутэ. Дакэ ва алеже рута ку нумэрул дой, атунч ну вор фи бань суфичиенць пентру тоате орашеле. Дакэ ва алеже рута ку нумэрул шаесе, атунч ярэшь ну вор фи бань суфичиенць пентру тоате орашеле. Дакэ ва алеже рута ку нумэрул чинч, атунч луынд чел май ефтен нумэр де рутэ (3) вом визита тоате орашеле, келтуинд 4800 руб.

Рэспунс: 35 сау 53.

сау

Фурнизорул де Интернет (компания, каре фурнизязэ сервичий де конексиуне ла Интернет) оферэ трей плане тарифаре.

План тарифар	Такса де абонамент	Такса де трафик
Планул «0»	Ну-й	2,5 руб. пентру 1 Мб
Планул «500»	550 руб. пентру 500 Мб трафик пе лунэ	2 руб. пентру 1 Мб песте 500 Мб
Планул «800»	700 руб. пентру 800 Мб трафик пе лунэ	1,5 руб. пентру 1 Мб песте 800 Мб

Утилизаторул пресупуне, кэ трафикул луй ва алкэтуи 600 Мб ын лунэ ши, реешинд дин ачаста, алеже чел май ефтин план тарифар. Кыте рубле ва плэти утилиз аторул пе лунэ, дакэ трафикул луй ва фи ынтр-адевэр егал ку 600 Мб?

Резолваре.

Прекэутэм тоате версиуниле.

Конформ Планулуй «0» утилизаторул ва келтуи $2,5 \cdot 600 = 1500$ руб. ын лунэ пентру 600 Мб де трафик.

Конформ планулуй «500» ел ва келтуи 550 руб. пентру такса де абонамент пентру 500 Мб ши $2 \cdot 100 = 200$ руб. май мулт ка ел. Прин урмаре сума тоталэ ын лунэ ва алкэтуи $550 + 200 = 750$ руб.

Конформ планулуй «800» утилизаторул ва келтуи ын лунэ пентру 600 Мб а трафикулуй 700 руб.

Чя май профитабилэ опциуне есте 700 руб.

Рэспунс: 700.

12. Инегалитэций симпле

Пентру фиекаре дин челе патру инегалитэць дин колоана дин стынга кореспунде уна дин солуцииле дин колоана дин дряпта. Стабилиць о кореспонденцэ ынтре инегалитэць ши солуцииле лор.

ИНЕГАЛИТАТЕ

СОЛУЦИЙ

А) $0,5^x \geq 2$

1) $x \geq -1$

Б) $0,5^x \leq 2$

2) $x \geq 1$

В) $2^x \leq 2$

3) $x \leq -1$

Г) $2^x \geq 2$

4) $x \leq 1$

Скриець ын рэспунс цифреле, аранжынду-ле ын ординя, кореспунзэтор литерелор:

А	Б	В	Г

Резолваре.

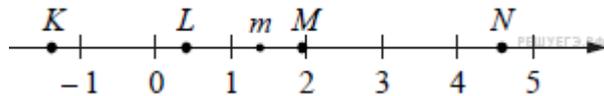
Афлэм мулцимя солуциилор пентру фиекаре инекуацие.

- А) $0, 5^x \geq 2 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$.
 Б) $0, 5^x \leq 2 \Leftrightarrow -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$.
 В) $2^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1$.
 Г) $2^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Рэспунс: 3142.

сау

Пе дряптэ есте нотат нумэрул m ши пунктеле K, L, M ши N .



ПУНКТЕ

НУМЭР

- | | |
|--------|-------------------|
| А) K | 1) $6 - m$ |
| Б) L | 2) m^2 |
| В) M | 3) $m - 1$ |
| Г) N | 4) $-\frac{2}{m}$ |

Скриець ын рэспунс цифреле, аранжынду-ле ын ординя, кореспунзэтор литерелор:

А	Б	В	Г

Резолваре.

Обсервэм, кэ $1 < m < 2$, реесе,
 $4 < 6 - m < 5$, $1 < m^2 < 4$, $0 < m - 1 < 1$, $-2 < -\frac{2}{m} < -1$.

Рэспунс: 4321.

Ну уйтаць сэ трансфераць тоате рэспунсуриле ын формуларул ку рэспунсурь №1

ПАРТЯ 2

Рэспунсул ла ынсэрчинэриле 13–16 требуе сэ фие ун нумэр ынтрэг сау фракцие зечималэ финитэ. Рэспунсул требуе скрис ын формуларул ку рэспунсурь №1 ын партя дряптэ де ла нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините, ынчепьнд ку примул пэтрэцел. Фиекаре цифрэ, семн минус ши виргулэ скриець ын пэтрэцел апарте ын кореспундере ку моделеле арэатате ын формулар. Унитэциле де мэсурэ ну есте нечесар де скрис.

13. Калкуле ши трансформэрь

Гэсиць валоаря експресией $\sqrt{12} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$

Резолваре.

$$\sqrt{12} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3} \left(2 \cos^2 \frac{5\pi}{12} - 1 \right) = \sqrt{3} \cos \frac{5\pi}{6} = \sqrt{3} \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= -\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

Рэспунс: $-1,5$.

сау

Гэсиць валоаря экспресией $\frac{\log_2 80}{3 + \log_2 10}$

Резолваре.

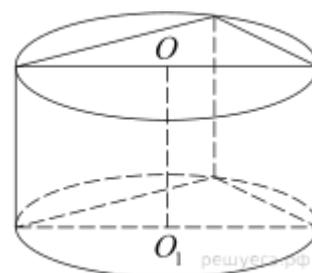
Эфектуэм трансформэриле:

$$\frac{\log_2 80}{3 + \log_2 10} = \frac{\log_2 (8 \cdot 10)}{3 + \log_2 10} = \frac{\log_2 8 + \log_2 10}{3 + \log_2 10} = \frac{3 + \log_2 10}{3 + \log_2 10} = 1.$$

Рэспунс: 1 .

14. Стереометрия.

Ын база призмей дрепте се афлэ ун триунгь дрептунгик ку катетеле 6 ши 8 . Мукииле латерале сынт егале ку $\frac{5}{\pi}$. Афлаць волумул чилиндрлуй, чиркумскрис ачестей призме.



Резолваре.

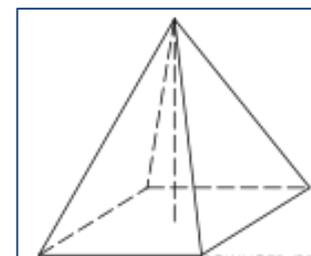
Конформ теоремей луй Питогаора лунжимя ипотенузей триунгюлуй де ла базэ есте егалэ ку $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Ын кыт ипотенуза есте диаметрул базей чилиндрлуй чиркумскрис, волумул луй

$$V = H \frac{\pi d^2}{4} = \frac{5}{\pi} \cdot \frac{100\pi}{4} = 125.$$

Рэспунс: 125 .

сау

Афлаць волумул пирамидей патрулатере регулате, латура базей а кэрея есте егалэ ку 4 , яр мукия латералэ егалэ ку $\sqrt{17}$.



Резолваре.

Ку ажуторул теоремей луй Питогаора афлэм ынэлцимя фцей латерале а пирамидей (h_1):

$$h_1 = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 2^2} = \sqrt{17 - 4} = \sqrt{13}.$$

Де асеменя ку ажуторул теоремей луй Питогаора афлэм ынэлцимя пирамидей (h_2):

$$h_2 = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 2^2} = \sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Афлэм ария базей а пирамидей: $S_{\text{осн.}} = 4 \cdot 4 = 16$.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h_2 \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 3 = 16.$$

Афлэм волумул пирамидей:

Рэспунс: 16 .

15. Валоаря чя май маре ши чя май микэ а функцией.

Афлаць валоаря чя май микэ а функцией $y = 4 \operatorname{tg} x - 4x - \pi + 5$ пе сегментул $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Резолваре.

Афлэм деривата функцией дате:

$$y' = \frac{4}{\cos^2 x} - 4 = 4 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = 4 \operatorname{tg}^2 x.$$

Деривата афлатэ есте ненегативэ пе сегментул дат, функция датэ креште пе ел, де ачея валоаря чя май микэ а функцией пе сегмент есте

$$y \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 4 \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \pi + 5 = 1.$$

Рэспунс: 1.

сау

Афлаць пунктул де миним ал функцией $y = 3x - \ln(x + 3)^3$.

Резолваре.

Обсервэм, кэ $y = 3x - 3 \ln(x + 3)$.

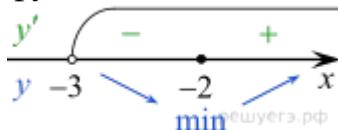
Домениул де дефиницие ал функцией— интервал дескис $(-3; +\infty)$.

Афлэм деривата функцией дате: $y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}$.

Афлэм zeroуриле дериватей: $3 - \frac{3}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Пунктул афлат апарцине интервалулуй $(-3; +\infty)$.

Детерминэм семнеле дериватей функцией ши арэтэм пе десен компортаря функцией:



Пунктул миним кэутат есте $x = -2$.

Рэспунс: -2.

16. Проблеме текстуале.

Прин прима цявэ трече ку 2 литри де апэ пе минут май пуцин, декыт прин а доуа. Кыць литри де апэ пе минут трек прин а доуа цявэ, дакэ еа умпле резерворул ку волумул де 130 литри ку 4 минуте май репеде, декыт прима цявэ умпле резерворул ку волумул де 136 литри?

Резолваре.

Фие прин цява а доуа трек x литри де апэ ын минут, $x > 2$, атуич прин прима цявэ трек $(x - 2)$ литри ын минут. Алкэтуим табелул дупэ дателе проблемей:

	Продуктивитатя (л/мин)	Тимпул (мин)	Волумул де лукру (л)
Прима цявэ	$x - 2$	$\frac{136}{x - 2}$	136
А доуа цявэ	x	$\frac{130}{x}$	130

Деоарече а доуа цявэ а умплут резерворул ку 4 минуте май репеде, обцинем екуация:

$$\frac{136}{x - 2} - \frac{130}{x} = 4$$

Резолвэм екуация:

$$\frac{136x - 130x + 260 - 4x^2 + 8x}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7x - 130}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+13)(x-10)}{x(x-2)} = 0,$$

$x = 10$ сау $x = -6,5$. Арункынд солудия стрэинэ – 6,5, обцинем, кэ прин цява а доуа трек 10 литри пе минут.

Рэспунс: 10.

сау

Ун турист мерже динтр-ун ораш ын алтул, ын фиекаре зи, мергынд май мулт, декыт зиуа пречедентэ, ку уна ши ачешь дистанцэ. Се штие, кэ ын прима зи туристул а мерс 10 километри. Детерминаць, кыць километри а мерс туристул ын а трия зи, дакэ тот друмул л-а паркурс ын 6 зиле, яр дистанца динтре ораше есте де 120 километри.

Резолваре.

Ын прима зи туристул а мерс $a_1 = 10$ км, ын а доуа зи — a_2, \dots , ын ултима зи — a_6 км. Ын тотал а мерс $S_n = 120$ км. Дакэ ын фиекаре зи туристул мержя май мулт, декыт ын зиуа пречедентэ, ку d км, атунч

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n,$$

унде $n = 6$ зиле, $a_1 = 10$ км. Ы наша мод,

$$\frac{2 \cdot 10 + 5d}{2} \cdot 6 = 120 \Leftrightarrow 5d = 20 \Leftrightarrow d = 4.$$

Атунч ын а трия зи туристул а мерс

$$a_3 = a_1 + 2d = 10 + 2 \cdot 4 = 18 \text{ км.}$$

Рэспунс: 18.

Ну уйтаць сэ трансфераць тоате рэспунсуриле ын формуларул ку рэспунсурь №1

Пентру а скри резолвэриле ши рэспунсуриле ла ынсэрчинэриле 17-21 фолосиць ФОРМУЛАРУЛ КУ РЭСПУНСУРЬ №2. Скриець май ынтый нумэрул ынсэрчинэрий ындеплините (17,18 ши а.м.д.), яр апой резолваря комплетэ ку лэмурире ши рэспунс. Рэспунсуриле скриець клар ши читец.

17. Екуаций, системе де екуаций

а) Резолваць екуация $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 9} - 3 = x$

б) Гэсиць тоате рэдэчиниле екуацией дате, че апарцин сегментулуй $\left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{5}\right]$.

Резолваре.

а) Скрием екуация суб форма $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 9} = x + 3$ ши фолосинд фаптул, кэ

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ x = y^2. \end{cases}$$

Обцинем:

$$\sqrt{x^3 + 4x^2 + 9} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 4x^2 + 9 = x^2 + 6x + 9, \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + 3x - 6) = 0, \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}, \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

б) Нумэрул 0 апарцине сегментулуй $\left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{5}\right]$. Пентру а компара $\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$ ши $\frac{7}{5}$ вом компара диференца ачестор нумере ку zero

$$\frac{-3 + \sqrt{33}}{2} - \frac{7}{5} = \frac{-15 + 5\sqrt{33} - 14}{10} = \frac{-29 + 5\sqrt{33}}{10} = \frac{-\sqrt{841} + \sqrt{825}}{10} < 0.$$

$$\frac{-3 + \sqrt{33}}{2} < \frac{7}{5}.$$

Ынсямнэ,

Рэспунс: а) $0, \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$. б) $0, \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$;
сау

а) Резолваць екуация $4^{\cos x} + 4^{-\cos x} = \frac{5}{2}$

б) Гэсиць тоате рэдэчиниле екуацией дате, че апарцин сегментулуй $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Резолваре.

а) Резолвэм екуация, ефектуынд субституция: $4^{\cos x} = t$

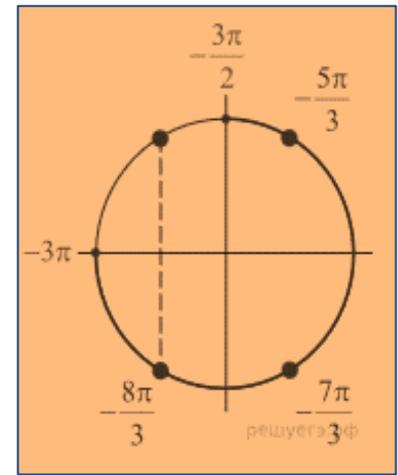
$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ревеним ла субституция: $t = 4^{\cos x}$, обцинем:

$$\begin{cases} 4^{\cos x} = 2, \\ 4^{\cos x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

б) Ку ажуторул чиркумферинцей унитаре селектэм рэдэчиниле, че апарцин сегментулуй $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Вом прими нумереле: $-\frac{8\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$.

Рэспунс: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z\right\}$; б) $-\frac{8\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$



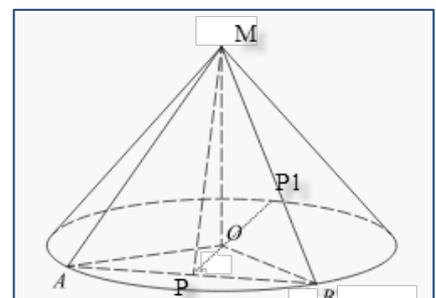
18. Унгюрь ши дистанце ын спаицу

Раза базей конулуй есте егалэ ку 6, яр ынэлцимя конулуй есте егалэ ку 8. Ын кон есте дусэ о секциуне, планул секциуней трече прин вырфул конулуй ши коарда базей, лунжимя кэрей есте егалэ ку 4. Гэсиць унгиол динтре планул базей ши планул секциуней.

Резолваре

Прекуэутэм триунгиул исосчел АОВ, ку латуриле $AO=OB=r$, унде r – раза чиркумферинцей. Дупэ кондицие пунктул Р – мижлокул сегментулуй АВ, прин урмаре, $OP \perp AB$.

Прекуэутэм триунгиул исосчел АМВ, ку латуриле



$AM=MB$, че сынт егале ку лунжимя женераоарей конулуй. Дин кондиция, кэ P – мижлокул сегментулуй AB урмязэ $MP \perp AB$. Астфел, авем, кэ $OP \perp AB$ ши $MP \perp AB$, ши, прин урмаре, унгул $\angle MPO$ есте унгь линиар ал унгулуй диедру динтре планул базей ши планул секциуней MAV .

Афлэм ачест унгь. Прекэутэм триунгул дрептунгик MOP (аша кум MO – ынэлцимя конулуй). Атунч танжента унгулуй $\angle MPO$ есте егалэ $\operatorname{tg} \angle MPO = \frac{MO}{PO}$.

Ынэлцимя $MO = 8$ есте датэ ын кондиция проблемей. Афлэм лунжимя сегментулуй PO . Прекэутэм триунгул дрептунгик APO , ла каре $AO=6$, яр $AP = AB : 2 = 4 : 2 = 2$.

Атунч дупэ теорема луй Питоагора, лунжимя PO ва фи егалэ

$$PO = \sqrt{AO^2 - AP^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

ши $\operatorname{tg} \angle MPO = \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$, респектив, $\angle MPO = \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Рэспунс: $\operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{5}}$.

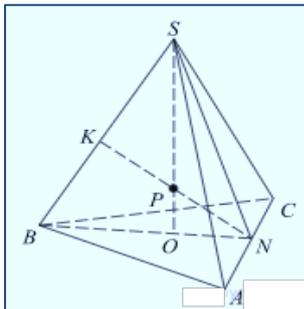
сау

Ын пирамида триунгулар регулатэ $SABC$ ку върфул S , тоате мукииле сынт егале ку 4, пунктул N — мижлокул мукией AC , пунктул O - чентрул базей пирамидей, пунктул P ымпарте сегментулуй SO ын рапортул 3 : 1, нумэрын дин върфул пирамидей.

а) Демонстраць, кэ дряпта NP есте перпендикуларэ дрептей BS .

б) Афлаць дистанца де ла пунктул B пынэ ла дряпта NP .

Резолваре



а) Пунктул O апарцине сегментулуй BN , чея че ынсямнэ, пунктул P , каре есте ситуат пе сегментулуй SO , се афлэ ын планул SBN . Прин урмаре, дряпта NP ла фел се афлэ ын планул SBN ши интерсектэ дряпта SB ын пунктул K .

Триунгул SNB исосчел, деоарече сегментеле SN ши BN — медианеле триунгюрилор екилатерале егале SAC ши BAC . Прин урмаре $SN = BN$. Ын пунктул O се интерсектэ

медианеле базей, деч, $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$. Дин пунктул P

коборым перпендикуларэ пе латура SN . Фие еа интерсектэ SN ын пунктул M . Триунгюриле SPM ши SNO сынт

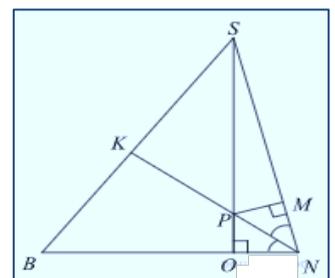
асеменя, деачея $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3$. Атунч, $PM = \frac{1}{3}SP = PO$. Прин

урмаре, триунгюриле NPO ши NPM сынт егале ши PN — бисектоаря унгулуй SNB . Ынтр-ун триунгь исосчел бисектоаря есте медианэ ши ынэлциме. Атунч, $NK \perp BS$.

б) Деоарече BS перпендикулар пе NK , атунч дистанца нечесарэ есте егалэ ку лунжимя сегментулуй BK . Деоарече NK есте медиана триунгулуй SNB , атунч

$$BK = \frac{1}{2}BS = 2.$$

Рэспунс: 2



19. Инекуаций, системе де инекуаций.

Резолваць системул де инекуаций

$$\begin{cases} 9^x - 28 \leq 3^{x+3}, \\ \log_{x+7} \left(\frac{3-x}{x+1} \right)^2 \leq 1 - \log_{x+7} \frac{x+1}{x-3}. \end{cases}$$

Резолваре.

1. Резолвэм прима инекуацие а системулуй. Фачем субституция $y = 3^x$:

$$y^2 - 28 \leq 27y \Leftrightarrow y^2 - 27y - 28 \leq 0 \Leftrightarrow (y - 28)(y + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 28.$$

Атунч $-1 \leq 3^x \leq 28$, де унде афлэм солуция примей инекуаций а системулуй: $x \leq \log_3 28$.

2. Резолвэм инекуация а доуа а системулуй:

$$2 \log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \leq 1 + \log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow \log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \leq 1.$$

Прекэутэм доуэ казурь.

Казул ынтый: $x + 7 > 1$.

$$\log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x-3}{x+1} \leq x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+7x+10}{x+1} \geq 0, \\ \frac{x-3}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(x+5)}{x+1} \geq 0, \\ \frac{x-3}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq -2, \\ x > 3. \end{cases}$$

Тоате валориле обцинуте але вариабилей ындеплинск кондиция $x + 7 > 1$.

Казул дой: $0 < x + 7 < 1$.

$$\log_{x+7} \frac{x-3}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \geq x+7 \Leftrightarrow \frac{x^2+7x+10}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+5)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5, \\ -2 \leq x < -1. \end{cases}$$

Авынд ын ведере кондиция $0 < x + 7 < 1$, обцинем: $-7 < x < -6$. Мулцимя солуциилор инекуацией а доуа а системулуй дат: $(-7; -6) \cup [-5; -2] \cup (3; +\infty)$.

3. Авынд ын ведере, кэ $3 < \log_3 28$, обцинем солуция системулуй де инекуаций инициал: $(-7; -6) \cup [-5; -2] \cup (3; \log_3 28]$.

Рэспунс: $(-7; -6) \cup [-5; -2] \cup (3; \log_3 28]$.

сау

Резолваць системул де инекуаций

$$\begin{cases} x + \frac{4x^2 + 5x}{x^2 - x - 6} \leq \frac{9}{5x - 15} + \frac{5x + 1}{5x + 10}, \\ 5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} \leq 26. \end{cases}$$

Резолваре.

Резолвэм а доуа инекуацие а системулуй:

$$\begin{aligned} 5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} \leq 26 &\Leftrightarrow \frac{5^x}{5} + \frac{5 \cdot 25}{5^x} - 26 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5^{2x} - 130 \cdot 5^x + 625 \leq 0 \Leftrightarrow 5 \leq 5^x \leq 125 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Прекэутэм прима инекуацие а системулуй пе мулцимя $[1; 3]$. Трансформэм партя дряптэ а ей:

$$\frac{9}{5(x-3)} + \frac{5x+1}{5(x+2)} = \frac{9x+18+5x^2-15x+x-3}{5(x+2) \cdot (x-3)} = \frac{5x^2-5x+15}{5(x+2) \cdot (x-3)} = \frac{x^2-x+3}{(x+2) \cdot (x-3)}.$$

Обцинем:

$$x + \frac{4x^2 + 5x}{(x+2) \cdot (x-3)} - \frac{x^2 - x + 3}{(x+2) \cdot (x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow x + \frac{4x^2 + 5x - x^2 + x - 3}{(x+2) \cdot (x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{3x^2 + 6x - 3}{(x+2) \cdot (x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2 - 6x + 3x^2 + 6x - 3}{(x+2) \cdot (x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{(x+2) \cdot (x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2 + 3x^2 - 3}{(x+2) \cdot (x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-1) + 3(x-1) \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1) \cdot (x^2 + 3x + 3)}{(x+2) \cdot (x-3)} \leq 0.$$

Триномул пэтрат $x^2 + 3x + 3 > 0$
 пентру орьче $x \in \mathbb{R}$, деоарече $D = 9 - 12 < 0$. Ын афарэ де аста, пе
 [1; 3] $x + 2 > 0$. Прин урмаре:

$$\frac{(x-1) \cdot (x^2 + 3x + 3)}{(x+2) \cdot (x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x < 3.$$

Рэспунс: [1; 3).

20. Проблеме дин планиметрие

Есте дат трапезул ку диагонале егале ку 8 ши 15.
 Сума базелор есте егалэ ку 17.

а) Демонстраць, кэ диагонале сынт перпендикуларе.

б) Афлаць ария трапезулуй.

Резолваре.

а) Прин пунктул C конструим о дряптэ паралелэ ку BD . Ла интерсекция ачестей дрепте ку дряпта AD маркэм пунктул C_1 , BCC_1D — паралелограм.

Ын триунгыл ACC_1 : $AC = 15$, $CC_1 = BD = 8$, $AC_1 = AD + DC_1 = 17$.

Обсервэм, кэ $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$ деоарече $289 = 225 + 64$, конформ теоремей инверсе, а теоремей луй Питагора, триунгыл ACC_1 — дрептунгик, унгыл ACC_1 дрепт. Атунч унгыл COD есте дрепт, чея че треба де демонстрат.

б)
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60.$$

Рэспунс: б) 60.

сау

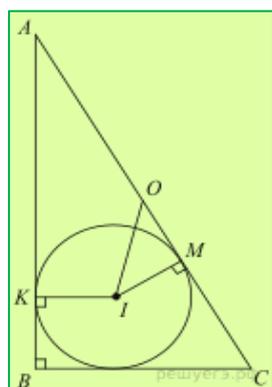
Ын триунгыл ABC есте ынскрисэ о чиркумферинцэ де раза R , тангентэ ла латура AC ын пунктул M , ынкыт $AM = 5R$ ши $CM = 1,5R$.

а) Демонстраць, кэ триунгыл ABC есте дрептунгик.

б) Афлаць дистанца динтре чентрул чиркумферинцей ынскрисе ши чиркумскрисе луй, дакэ се штие, кэ $R = 4$.

Резолваре.

а) Фие чиркумферинца ынскрисэ есте тангентэ латурий AB ын пунктул K .



Нотэм $BK = x$. Фие S — ария триунгылуй, p — семипериметрул. Атунч

$$p = 5R + 1,5R + x = 6,5R + x, \quad S = pR = R(6,5R + x).$$

Пе де алтэ парте, конформ формулей луй Херон

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{(6,5R+x) \cdot 5R \cdot 1,5R \cdot x} = R\sqrt{7,5x(6,5R+x)}.$$

Дин екуация
$$R(6,5R + x) = R\sqrt{7,5x(6,5R + x)}$$

обцинем, кэ $R = x$. Латуриле триунгылуй ABC сынт егале ку $6,5R$, $6R$ ши $2,5R$, прин урмаре, ачест триунгыл есте дрептунгик

ку унгул дрепт де ла вырфул B .

б) Фие I ши O — центрул респектив а чиркумферинцей ынскресе ши чиркумскресе триунгулуй ABC . Пунктул O — мижлокул гипотенузей $AC = 6,5R = 26$, ши $OM = CO - CM = 13 - 1,5R = 7$.

$$\text{Атунч } IO = \sqrt{OM^2 + MI^2} = \sqrt{7^2 + R^2} = \sqrt{65}.$$

Рэспунс: б) $\sqrt{65}$

21. Екуаций, инекуаций ши системеле лор ку параметри

Гэсиць тоате валориле параметрулуй a , пентру фиекаре дин каре екуация $a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$ аре чел пуцин о рэдэчинэ.

Резолваре.

Фие $t = x + 1$, атунч екуация ва авя форма:

$$a^2 + 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} = 2a + 3|t - 4a|.$$

Фие $f(t) = a^2 - 2a + 5\sqrt{t^2 + 4}$, $g(t) = 3|t - 4a| - 7|t|$

Пентру $t \geq 0$ функция $g(t)$ дескреште де ла $12|a|$ пынэ ла $-\infty$. Ши пентру $t < 0$ функция $g(t)$ креште де ла $-\infty$ пынэ ла $12|a|$ (фэрэ а се инклуде), адикэ валоаря чя май маре а пэрций дин дряпта а екуацией се атинже пентру $t = 0$ ши есте егалэ ку $12|a|$.

Функция $f(t)$ атинже валоаря чя май микэ пентру $t = 0$: $f(t) = a^2 - 2a + 10$. Пентру ка екуация сэ айбэ солуцие, чя май маре валоаря дин партя дряптэ требуе сэ фие ну май микэ декыт валоаря чя май микэ дин партя стынгэ:

$$\begin{aligned} 12|a| \geq a^2 - 2a + 10 &\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 - 14a + 10 \leq 0 \\ a < 0, \\ a^2 + 10a + 10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ 7 - \sqrt{39} \leq a \leq 7 + \sqrt{39} \\ a < 0, \\ -5 - \sqrt{15} \leq a \leq -5 + \sqrt{15} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - \sqrt{39} \leq a \leq 7 + \sqrt{39}, \\ -5 - \sqrt{15} \leq a \leq -5 + \sqrt{15} \end{cases} \end{aligned}$$

Рэспунс: $[-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}] \cup [7 - \sqrt{39}; 7 + \sqrt{39}]$

сау

Гэсиць тоате валориле параметрулуй a , пентру фиекаре динтре каре системул де екуаций

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ x - y = a \end{cases}$$

аре май мулт де о солуцие.

Резолваре.

Репрезентэм ын планул де координате мулцимя пунктелор, координателе кэроора сатисфак прима екуацие а системулуй.

Прекэутэм доуэ казурь:

1) Дакэ $x^2 + y^2 \geq 25$, атунч обцинем екуация $x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = x^2 + y^2 - 25 \Leftrightarrow y = x + 5$.

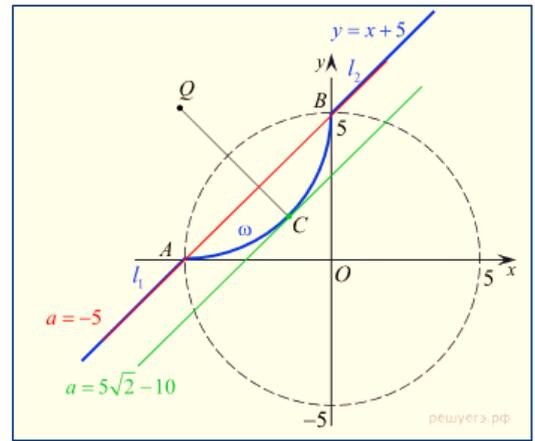
Екуация обцинутэ дескрие о дряптэ ку коэффициентул унгулар $k = 1$ че трече прин пунктеле $B(0; 5)$ ши $A(-5; 0)$.

2) Дакэ $x^2 + y^2 < 25$, авем

$$x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = -x^2 - y^2 + 25 \Leftrightarrow (x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 5^2.$$

Екуация обцинутэ дескрие о чиркумферинцэ ку чентрул ын пунктул $Q(-5; 5)$ ши раза 5.

Дряпта ши чиркумферинца се интерсектэ ын доуэ пункте $B(0; 5)$ ши $A(-5; 0)$, ситуате пе чиркумферинца $x^2 + y^2 = 25$, деачея ын примул каз обцинем доуэ семидрепте l_1 ши l_2 ку орижиня ын A ши B респектив, ын казул дой — аркул ω ку екстремитэциле ын ачеляшь пункте (везь десенул). Обсервэм, кэ пунктул $C\left(-5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}; 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ есте ситуат пе



аркул ω ши сегментул QC перпендикулар пе дряпта, дескрисэ ын примул каз.

Прекэутэм а доуа екуацие а системулуй. Еа дескрие дряпта m , паралелэ семидрептелор l_1 ши l_2 сау че ле концине.

Пентру $a = -5$ дряпта m концине семидрептеле l_1 ши l_2 , адикэ системул инициал аре о инфинитате де солуций.

Пентру $a = 5\sqrt{2} - 10$ дряпта m трече прин пунктул C , ынсямнэ кэ дряпта m есте тангентэ аркулуй ω ши ну аре пункте комуне ку семидрептеле l_1 ши l_2 , адикэ системул инициал аре о сингурэ солуцие.

Пентру $-5 < a < 5\sqrt{2} - 10$ дряпта m интерсектэ аркул ω ын доуэ пункте ши ну аре пункте комуне ку семидрептеле l_1 ши l_2 , адикэ системул инициал аре доуэ солуций.

Пентру $a < -5$ сау $a > 5\sqrt{2} - 10$ дряпта m ну аре пункте комуне ку семидрептеле l_1 ши l_2 ши аркул ω , адикэ системул инициал ну аре солуций.

Прин урмаре, системул инициал аре май мулт де о солуцие пентру

$$-5 \leq a < 5\sqrt{2} - 10.$$

Рэспунс: $[-5; 5\sqrt{2} - 10)$.